

# Zur Theorie des Elektrons IV

Von WALTER WESSEL

US Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AF Base, Ohio USA

(Z. Naturforschg. 10a, 89—103 [1955]; eingegangen am 5. Januar 1955)

Das zugrunde liegende Prinzip, das bisher im wesentlichen heuristisch eingeführt war, wird kritisch abgeleitet unter dem Gesichtspunkt, daß es sich um eine Einteilchentheorie handelt. Eine Quantisierung des unendlich vielkomponentigen Materiefeldes wird noch nicht versucht, doch lassen sich die Annahmen genau bezeichnen, die der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes zugrunde liegen. Diese läßt sich vollständig auf ein Eigenwertproblem mit wohldefinierten Matrizen bzw. Operatoren zurückführen. Für die Behandlung der kräftefreien Bewegung, d. h. für die Bestimmung der Eigenwerte des Massenoperators, wird eine mathematische Methode entwickelt. Ihre Durchführung gelingt in übersichtlicher Weise, wenn man den Massenoperator, den wir von Teil II und III dieser Arbeit übernehmen, einer korrespondenzmäßig begründbaren Rationalisierung unterwirft. Seine Eigenwerte hängen empfindlich vom Werte der Feinstrukturkonstanten ab und fallen mit ihrem gegenwärtig angenommenen Werte für den Spin  $1/2$  sehr nahe mit den Eigenwerten  $\pm 1$  des Massenoperators der Diracschen Theorie des Elektrons zusammen. Eine verbleibende Realitätsschwierigkeit wird mit dem Einteilchencharakter der Theorie in Zusammenhang gebracht.

Das Prinzip der hier versuchten Theorie des Elektrons<sup>1</sup> ist, wie wir wohl beim Leser als bekannt voraussetzen dürfen, der Gedanke, die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes durch eine Verallgemeinerung der Dirac-Matrizen zu ersetzen. Während man sonst im mechanischen Teile der Hamilton-Funktion mit den wohl bekannten vierzeiligen Matrizen rechnet und das Feld in Form einer unendlichen Mannigfaltigkeit von Oszillatoren ankoppelt, ersetzen wir die Dirac-Matrizen durch unendliche (hermitesche) in solcher Weise, daß danach die Oszillatoren herausfallen und nur noch äußere, vorgegebene Felder wie in der gewöhnlichen Dirac-Gleichung stehen bleiben.

Die Matrizen, die dabei an die Stelle der Diracschen Geschwindigkeitsmatrizen treten, sind von verhältnismäßig einfachem Bau und hinsichtlich ihrer Darstellungen und Eigenwerte völlig übersichtbar. Die einzige wesentliche Schwierigkeit ist der Massenoperator, das ist die Matrix, die an die Stelle der von Dirac als  $\rho_3$  eingeführten Matrix tritt und mit der sich die Ruhmasse multipliziert. Diese Größe ist klassisch eine genau angebbare Funktion der beiden Invarianten des Momententensors und analytisch nicht besonders kompliziert; sie enthält aber eine Quadratwurzel, die im quantenmechanischen Gebrauch sehr unbequem

und überdies nicht immer hermitesch reell ist. Wir haben daher in Teil III dieser Arbeit den Massenoperator im Sinne einer quantenmechanischen Umdeutung vereinfacht. Für den damaligen Zweck war eine ziemlich grobe Vereinfachung ausreichend. Es handelte sich nur darum, orientierend zu zeigen, daß unsere Betrachtungsweise qualitativ richtig ist, insbesondere die Lambshift größenordnungsmäßig wiedergibt, so daß sich die Inangriffnahme der schwierigen Störungsrechnung lohnte. Wir haben dann auch die Störungsrechnung im Sinne einer Lorentz-Transformation mit veränderlichen Parametern durchzuführen versucht, doch war das Ergebnis ganz unbefriedigend insofern, als man dabei erheblich falsche Faktoren bei der relativistischen Feinstruktur erhielt. Ihr Auftreten und mögliche Vermeidung wurden schon halbklassisch diskutiert<sup>2</sup>. Für eine systematische Bereinigung muß man offenbar vom Massenoperator ausgehen. In der Tat war der vereinfachte auch nicht hermitesch reell; daß man reelle Eigenwerte damit erhält, liegt daran, daß er in Verbindung mit der nicht damit vertauschbaren vierten Komponente der Vierergeschwindigkeit auftritt.

Inzwischen haben wir für die Umdeutung des Massenoperators eine Lösung gefunden, die mindestens in drei Punkten als sehr befriedigend er-

<sup>1</sup> W. Wessel, Z. Naturforschg. 1, 622 [1946]; 6a, 478 [1951]; 7a, 583 [1952]. Im folgenden als I, II, III zitiert. Weitere Beiträge daselbst 3a, 559 [1948] u. 6a, 473 [1951].

<sup>2</sup> W. Wessel and S. J. Czyzak, Phys. Rev. 91, 986 [1953]. Im folgenden als C zitiert.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

scheint: sie erfolgt so gut wie willkürfrei durch Ersatz einer Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung; der erhaltene Operator ist hermitesch reell, und er fügt sich so gut in das ursprünglich sehr unzugängliche Eigenwertproblem ein, daß sich dieses vollkommen übersehen und im einfachsten Falle so gut wie geschlossen lösen läßt. Dieser einfachste Fall ist der Spin  $1/2$ . Er bildet nur eine Teillösung unseres Problems, insofern als unsere Spinmatrix wie alle andern Matrizen unendlich ist und auch die Eigenwerte  $3/2$ ,  $5/2$  usw. hat. Wir beschränken uns auf diesen Fall in der Erwartung, daß er die tiefsten Eigenwerte liefert. Diese Eigenwerte fallen tatsächlich nahe zusammen (zufällig sogar ohne Renormierung) mit den Eigenwerten  $\pm 1$  des Diracschen Operators  $\rho_3$ . Der Unterschied ist nur, daß wegen Störung der Hermitezität durch die vierte Geschwindigkeitskomponente der Wert bei  $+1$  nicht rein reell ist, sondern in zwei konjugiert komplexe zerfällt, die nahe  $+1$  auf dem Einheitskreise liegen. Wir kommen auf diese Realitäts-schwierigkeit weiter unten zurück. Jedenfalls sind die Massen endlich und fast symmetrisch zur Null, obwohl sie nicht durch bloße Invarianz- oder Symmetriebetrachtungen bestimmt, sondern Lösungen eines quantenelektrodynamischen Eigenwertproblems sind, in das die Feinstrukturkonstante empfindlich eingeht. Bei der Auswertung ist der genaue, nur zur Erlangung einer geschlossenen Lösung in den Dezimalen ein wenig abgerundete Wert dieser Konstanten zugrunde gelegt.

Die vorstehenden Betrachtungen bilden die zweite Hälfte dieser Arbeit. Nachdem eine beträchtliche mathematische Strenge und auffallend einfache Resultate darin erreicht waren, erschien es uns wünschenswert, auch die physikalischen Grundlagen besser zu klären. Unser Prinzip war ursprünglich eine ziemlich heuristische Interpretation und Verallgemeinerung der Diracschen Theorie. Eine beschränkte formale Rechtfertigung wurde vor einiger Zeit erreicht<sup>2</sup>, indem sich zeigen ließ, daß der von uns betrachtete klassische Bewegungstyp unter gewissen Voraussetzungen in den Bewegungsgleichungen der Theorie des Elektrons von Bopp enthalten ist<sup>3</sup>. Da die Boppschen Gleichungen sich streng aus einer linearen Elektrodynamik ableiten lassen, ist also auch unser Be-

wegungstyp daran angeschlossen. Die Voraussetzungen sind aber ziemlich einschränkend, nämlich kräftefreie Bewegung, ein bestimmter — eben der oben genannte — Massenoperator und Minimal-spin Null. Es sind nur unsere Lösungen, nicht unsere Bewegungsgleichungen partikuläre Integrale der Gleichungen von Bopp. Unsere Bewegungsgleichungen folgen nicht aus einer Lagrange-Funktion, sondern aus einer Hamilton-Funktion mit Poisson-Klammern, die im wesentlichen aus der Forderung von Erhaltungssätzen abgeleitet werden.

Die Frage nach einer besseren Begründung läßt sich auf Grund der neueren Entwicklung der Quantenelektrodynamik klar beantworten. Um kovariante Verhältnisse zu haben, muß man nicht von einer Hamilton-Funktion, sondern von einer Lagrange-Funktion ausgehen, und um zu einer Lagrange-Funktion zu kommen, die die Stromdichte willkürfrei einführt, muß man das Materiefeld einschließen. Das hat bei uns besondere Schwierigkeiten, weil unsere  $\psi$ -Funktion unendlich vielkomponentig ist, und soll auch in dieser Arbeit noch nicht versucht werden. Die Notwendigkeit dieses Schrittes macht aber die Realitätsverhältnisse und die Dissymmetrie unserer Masseneigenwerte verständlich. Es liegt ja nahe, die komplexe Natur des bei  $+1$  liegenden Eigenwertes mit der Instabilität des positiven Elektrons in Verbindung zu bringen. Das ist nicht möglich insofern, als unsere Theorie eben noch als Einteilchentheorie aufgebaut ist und daher über die Abhängigkeit der Halbwertszeit von dem Vorhandensein negativer Elektronen keine Auskunft geben kann. Man kann über die Instabilität der „Löcher“ nichts aussagen, weil man eben keine Löcher hat. Man hat aber stabile Zustände negativer Energie. Was man daher erwarten muß, ist eine Instabilität des negativen Elektrons in Zuständen positiver Energie, denn seine Tendenz, in Zustände negativer Energie überzugehen, ist ja elektrodynamischen Ursprungs und daher in unserer Quantisierung des elektromagnetischen Feldes mit einbegriffen. Es bleibt nichts übrig, als daß sie sich in einem komplexen Eigenwerte äußert, wobei der Imaginärteil der Größenordnung nach einer halbklassisch berechneten Übergangswahrscheinlichkeit durch Ausstrahlung entspricht. Die Tatsache, daß der Realteil nahe bei  $+1$  liegt, besonders in Verbindung damit, daß der andere Eigenwert tatsächlich reell gleich  $-1$  wird und daß kein dritter Realteil exi-

<sup>3</sup> Siehe H. Hönl, *Ergebn. exakt. Naturwiss.* **26**, 291 [1952].

stiert\*, hat wenig Wahrscheinlichkeit als Zufall und ist wohl wirklich ein Zeichen dafür, daß man den niedrigsten Zuständen der leichtesten Partikel mit einer Einteilchentheorie nahekommen kann.

Unter dieser Voraussetzung leiten wir in der ersten Hälfte dieser Arbeit unser Prinzip einmal möglichst direkt aus der Quantenelektrodynamik ab. Wenn man sich die Grenzen dieses Versuchs gegenwärtig hält und keine unerfüllbare Strenge anstrebt, ist der Weg im wesentlichen vorgezeichnet. Die Schritte mangelnder Strenge sind zwei. Der erste, die Überwindung einer Unbestimmtheit in Abschnitt I betreffend, dürfte kaum problematisch sein. Der entscheidende Schritt ist die Extrapolation einer klassischen Gleichung am Ende desselben Abschnittes. Hier müßte eigentlich die Quantisierung des Materiefeldes eingreifen. Die oben erwähnte Umdeutung des Massenoperators und die in Abschnitt II begründete, schon in Teil III dieser Arbeit benutzte Vertauschung der Operatoren  $u_k$  und  $U_k$  betreffen nicht die Methode, sondern nur die Auswertung.

## I

Die im folgenden benutzten Bezeichnungen sind:  $p$ ,  $E$  für Impuls und Energie, dargestellt durch den Vierervektor  $p_j$ ,  $j=1, 2, 3, 4$ ;  $\mathfrak{A}$  und  $V$  bzw.  $A_j$  für das skalare und Vektorpotential;  $v$  für die Geschwindigkeit,  $u_j$  für die Vierergeschwindigkeit in Vielfachen von  $c$ ;  $\beta = v/c$ . Das Potential äußerer Kräfte wird gegebenenfalls durch

$$g_j = p_j + e/c \cdot A_j \quad (1.1)$$

eingeführt. Ein Punkt bezeichnet die Ableitung nach der Zeit, ein Strich die nach der Weltlinie; daher ist  $u_j = x_j'$  ein Einheitsvektor längs der Weltlinie:

$$\begin{aligned} u_j u^j &= u^2 - (u^4)^2 = -1, \\ u_j u^{j'} &= uu' - u^4 u^{4'} = 0, \\ uu'' - u^4 u^{4''} &= -u_j' u^{j'} = -(u')^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Unsere Theorie läßt sich als eine klassische Deutung und Verallgemeinerung der Diracschen auffassen auf Grund der in C bewiesenen Tatsache,

daß der Ausdruck für die Energie eines geladenen Teilchens mit der Ruhmasse  $m$  in der Form

$$E = vg - eV + mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (1.3)$$

ein Integral der Lorentzschen Bewegungsgleichungen mit Einschluß der Strahlungskraft für ein punktförmiges Elektron ist, wenn  $m$  als Variable betrachtet wird, die der Gleichung

$$m' = (2e^2/3c^2) u_k' u^{k'} \quad (1.4)$$

genügt. Der Impuls  $g_j$  ist dann nicht mehr  $mcu_j$ , wie in der gewöhnlichen relativistischen Mechanik, sondern

$$g_j = mcu_j - (2e^2/3c) u_j', \quad (1.5)$$

vgl. C (1.6) oder (1.9), d. h.  $g_j$  enthält die Ableitung von  $u_j$ , was  $p_j$  und  $u_j$  unabhängig macht. Diracs Gleichung lautet bekanntlich<sup>4</sup>

$$E = \alpha g - eV + \varrho_3 mc, \quad (1.6)$$

wobei  $g$  von  $\alpha$  und  $\varrho_3$  unabhängig ist. Die Ähnlichkeit zwischen (1.3) und (1.6) ist früh bemerkt worden; sie erstreckt sich auch, wenn schon nicht so klar, auf die Bewegungsgleichungen der  $\alpha$  und  $\varrho_3$ . Unser Verfahren besteht im wesentlichen darin, sie vollständig zu machen, d. h. die Bewegungsgleichungen der  $\alpha$  und  $\varrho_3$  und anderer dazugehöriger Variabler so abzuändern, daß die Strahlungseffekte vollständig in einer Gleichung wie (1.6) oder (1.3) eingeschlossen werden.

Die Größe auf der rechten Seite von (1.4) ist das Massenäquivalent der von der bewegten Ladung pro Zeiteinheit in ihrem Ruhsystem ausgestrahlten Energie. In der Quantenelektrodynamik erscheint diese Energie als die Energie des elektromagnetischen Feldes. Es ist — oder war — das stehende Verfahren, diese Energie auf der rechten Seite von Gl. (1.6) hinzuzufügen, obwohl ihr Transformationsverhalten nicht das der andern Terme ist, und unsere bisherige Praxis war einfach, sie durch eine entsprechende Masse auszudrücken und diese der invarianten Gl. (1.4) zu unterwerfen.

Untersuchen wir nun genauer, was dies bedeutet. Wir gehen etwa aus von der von Heitler in seinem Lehrbuch<sup>5</sup> angegebenen Hamilton-Funk-

\* Wir möchten auf diesen Punkt besonders aufmerksam machen. Scheinbar spricht nichts so sehr gegen unsern Versuch, wie die schwierige und unvollkommene Art, mit der die Eigenwerte  $\pm 1$  bei uns herauskommen, verglichen mit der Einfachheit, mit der sie bei Dirac erscheinen. Man muß sich demgegenüber klarmachen, daß wir hier nicht bloß eine invariante Gleichung, sondern ein Massenspektrum aufsuchen, und daß die Existenz von nur einem Paar geladener

Teilchen vom Spin  $1/2$ , die sich nicht weiter aufspalten oder umwandeln (keinen isotopen Spin haben), eine der zuerst erklärungsbedürftigen Tatsachen ist. Wir schreiben es umgekehrt dieser Tatsache zu, daß hier eine Einteilchentheorie sinnvoll sein kann.

<sup>4</sup> P. A. M. Dirac, Quantum Mechanics, 3rd ed., Oxford 1947.

<sup>5</sup> W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation, Oxford 1936.



tion (l. c. § 10), wobei wir die folgenden Abänderungen treffen:  $\alpha$  und  $\beta$  (das unserm  $q_3$ , nicht unserm  $\beta$  entspricht) seien durch die Symbole von (1.3) ersetzt; das Coulombsche Feld sei in  $g^4$  eingeschlossen; die Wechselwirkungsenergie werde nicht als besonderer Term geführt, sondern mit dem mechanischen Teile der Hamilton-Funktion vereinigt. Um ihr  $\mathfrak{A}$  von dem  $\mathfrak{A}$  gegebener Felder zu unterscheiden und an seinen Ursprung aus transversalen Wellen zu erinnern, schreiben wir dafür  $\mathfrak{A}_t$ . Einige kleinere Abweichungen in der Bezeichnung ( $-e$  für  $e$ ,  $m_0 c^2$  für  $\mu$  usw.) bedürfen keiner Erläuterung. Wir schreiben also

$$H = H_P + H_R, \quad (1.7)$$

$$H_P = v (g + e/c \cdot \mathfrak{A}_t) - eV + m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (1.8)$$

$$H_R = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda}^2 (q_{\lambda} q_{\lambda}^* + q_{\lambda}^* q_{\lambda}). \quad (1.9)$$

Mit dem letzten Term haben wir die Feldenergie durch geeignete kanonische Variable ausgedrückt, vgl. l. c. § 7. Das Vektorpotential lautet in denselben Variablen

$$\mathfrak{A}_t = \sum_{\lambda} (q_{\lambda} \mathfrak{A}_{\lambda} + q_{\lambda}^* \mathfrak{A}_{\lambda}^*). \quad (1.10)$$

Wir fragen nun nach dem Zeitverhalten von  $H_R$ . Der Einfachheit halber benutzen wir die quantentheoretische Schlußweise, obwohl man dasselbe auch klassisch tun könnte. Mit Benutzung der Vertauschungsrelationen bei Heitler (l. c.<sup>5</sup>) haben wir

$$\begin{aligned} \dot{H}_R &= (i/\hbar) [H, H_R] = (i/\hbar) [H_P, H_R] \\ &= (ie/c) v \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} (q_{\lambda} \mathfrak{A}_{\lambda} - q_{\lambda}^* \mathfrak{A}_{\lambda}^*) \\ &= - (e/c) v \sum_{\lambda} (\dot{q}_{\lambda} \mathfrak{A}_{\lambda} + \dot{q}_{\lambda}^* \mathfrak{A}_{\lambda}^*) \\ &= - (e/c) v \partial \mathfrak{A}_t / \partial t = e (v \mathfrak{E}), \end{aligned} \quad (1.11)$$

wo  $\mathfrak{E}$  der elektrische Vektor des Strahlungsfeldes ist. Da wir hier ein einzelnes Elektron betrachten, müssen wir sein eigenes Feld auf geeignete Weise einführen. Ein Weg dafür ist von Dirac in einer bekannten Arbeit angegeben worden<sup>6</sup>. In unserer Schreibweise ( $u_j$  statt  $v_j$  und  $u_j u^j = -1$  statt  $v_j v^j = +1$ ) lautet sein Resultat

$$\mathfrak{E} = - (2e/3) (u'' u^4 - u u^{4'}). \quad (1.12)$$

Indem wir hier mit  $u$  multiplizieren, erhalten wir unter Gebrauch von (1.2) in seinen verschiedenen Formen

$$u \mathfrak{E} = - (2e/3) (-u_j' u^j u^4 + u^{4'}). \quad (1.13)$$

Hiervon ließe sich das  $v \mathfrak{E}$  von Formel (1.11) durch  $u = u^4 v/c$  ableiten. Statt dessen können wir auch von  $\dot{H}$  zu  $H'$  übergehen, indem wir (1.11) mit  $u^4/c$  multiplizieren. Dies ist formal ein einfacher Prozeß, doch muß man sich darüber klar sein, daß man damit endgültig von der Feld-Partikel-Vorstellung zu der reinen Partikel-Vorstellung übergeht, weil nur dann der Gebrauch einer Weltlinie einen Sinn hat. Indem wir das tun, erhalten wir aus (1.11) und (1.13)

$$H'_R = (2e^2/3) \{ (u')^2 u^4 - u^{4'} \}, \quad (1.14)$$

wo  $(u')^2$  der Kürze halber für  $u_j' u^j$  steht, und durch Integration längs der Weltlinie ( $ds$ )

$$H_R = (2e^2/3) \{ \int u^4 (u')^2 ds - u^{4'} \}. \quad (1.15)$$

Wir wenden uns nun zu dem Term mit  $\mathfrak{A}_t$  in (1.8), d. h. der Wechselwirkungsenergie, die noch die Feldvariablen explizit enthält, und versuchen, sie durch die Partikelvariablen zu ersetzen. Dies kann wieder nach dem Verfahren von Dirac l. c.<sup>6</sup> geschehen. Der Vektor  $\mathfrak{E}$  wird dort als halbe Differenz eines retardierten und eines avancierten Feldes erhalten. Diese Terme lassen sich ableiten aus einem retardierten und avancierten Potential; wir können daher unser  $\mathfrak{A}$  durch

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} (\mathfrak{A}_{\text{ret}} - \mathfrak{A}_{\text{adv}}) \quad (1.16)$$

ersetzen, und dies kann unmittelbar nach den Formeln von Dirac berechnet werden. Einige Einzelheiten sind in Anhang I gegeben. Das Resultat ist

$$\mathfrak{A} = e u'. \quad (1.17)$$

Diese Formel gilt für das Gesamtfeld, von dem wir nur den transversalen Teil zu nehmen haben. Während nun das  $\mathfrak{E}$  eines punktförmigen Elektrons, so wie wir es in (1.11) gebraucht haben, wesentlich transversal ist, weil  $\text{div } \mathfrak{E}$  überall außer am Orte des Elektrons verschwindet, gilt dies nicht für das zugehörige  $\mathfrak{A}$ , weil  $\text{div } \mathfrak{A} = -\partial V/\partial t$  und  $\dot{V} \neq 0$  ist. Es ist naheliegend anzunehmen, daß der transversale Teil  $2/3$  des ganzen ist, und wir haben dieses Theorem in Anhang II zu beweisen versucht. Leider ist das Ergebnis nicht ganz willkürfrei; die Annahme ergibt sich aber als die natürlichste und fügt sich auch so sinnvoll in die übrige Schlußweise ein<sup>7</sup>, daß wir sie wohl unbe-

<sup>6</sup> P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., Lond. (A) 167, 148 [1938].

<sup>7</sup> Man beachte z. B., daß als Folge davon der Faktor von  $u_j$  in (1.20) mit Rücksicht auf (1.5) gerade gleich  $m c u^j$  wird, wie man erwarten muß.



denklich benutzen dürfen. Wir nehmen also an, daß

$$\mathfrak{H}_t = \frac{2}{3} \mathfrak{H} = \frac{2}{3} e u'. \quad (1.18)$$

Indem wir (1.8), (1.15) und (1.18) in (1.7) einführen, haben wir

$$H = v (g + 2 e^2/3 c \cdot u') - eV + m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + (2 e^2/3) \left\{ \int u^4 (u')^2 ds - u^4 \right\}. \quad (1.19)$$

Im Bestreben, eine invariante Hamilton-Funktion herzustellen, betrachten wir nun  $H$  als die Teilchenenergie, kombinieren sie mit  $eV$  und multiplizieren den ganzen Ausdruck mit  $u^4 = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ . Er lautet dann, mit  $u^4 v = uc$  und Einführung von  $g^4$ , unter Summation über  $j$  von 1 bis 4:

$$c u_j (g^j + 2 e^2/3 c \cdot u_j') + m_0 c^2 + (2 e^2/3) u^4 \int u^4 (u')^2 ds = 0. \quad (1.20)$$

Damit haben wir die Rückwirkung des Feldes in den zwei Termen mit  $2e^2/3$  kondensiert, und die interessante Tatsache ist, daß als Folge von (1.18) in dem ersten von ihnen die Wechselwirkungsenergie, die in der Schwinger-Feynmanschen Theorie eine so hervorragende Rolle spielt, sich hier dank der Orthogonalität von  $u_j$  und  $u_j'$  vollständig heraushebt. Es ist möglich, in der Schwingerschen Theorie eine entsprechende Reduktion zu machen<sup>8</sup>, doch ist ein unmittelbarer Vergleich nicht möglich, auch wenn man von der  $\psi$ -Feld-Quantisierung absieht, weil in den bisher von uns betrachteten Matrixdarstellungen die  $u_j$  (oder vielmehr die  $\kappa_j$ , siehe weiter unten) infolge ihres Ursprungs aus Poisson-Klammern nur in den ersten Zeilen und Kolonnen eine gewisse Ähnlichkeit mit den Diracschen haben, an deren Stelle sie stehen.

Gl. (1.20) wäre die Beziehung, die wir abzuleiten wünschen, wenn ihre Invarianz nicht durch die beiden  $u^4$ -Faktoren in dem letzten Term gestört wäre. In ihrem Auftreten spiegelt sich die schon erwähnte Tatsache, daß die Terme in (1.7) nicht alle denselben Kovarianzcharakter haben; es ist die wohlbekannte Tatsache, daß die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes nicht ein Skalar, sondern die 44-Komponente eines Tensors ist. Diese Schwierigkeit kann in einer klassischen Theorie nicht behoben werden, sondern nur durch eine geeignete Kopplung des elektromagnetischen

Feldes mit dem  $\psi$ -Felde, wie in den wohlbekannten Arbeiten von Schwinger u. a. Wir haben das, wie gesagt, noch nicht versucht und stellen vielmehr die Invarianz einfach dadurch her, daß wir die störenden  $u^4$ -Faktoren auslassen. Man verallgemeinert damit eine für kleine Energien richtige Formel durch eine Extrapolation, die zunächst durch nichts begründet ist, als durch ihre Einfachheit; es kommt auf den Versuch an, wieviel man damit erreicht. Indem wir dann

$$m = m_0 + (2 e^2/3 c^2) \int (u')^2 ds \quad (1.21)$$

setzen, erhalten wir aus (1.20) nach Division durch einen Faktor  $c$

$$u_j g^j + mc = 0. \quad (1.22)$$

Das ist die gewünschte Gleichung, d. h. Gl. C (1.10). Die Masse  $m$  in (1.21) verändert sich entsprechend (1.4).

## II

Die nächste Aufgabe ist, einen Satz von Poisson-Klammern für die verschiedenen Variablen mit Einschluß von  $m$  zu finden, so daß sinngemäße Bewegungsgleichungen, insbesondere die Gl. (1.4) für  $m$ , aus (1.22) als Hamiltonscher Funktion folgen. Wir setzen

$$H_u = u_j g^j + mc \quad (2.1)$$

und bezeichnen Poisson-Klammern wie früher durch  $\{ \}$ . Die Existenz der nötigen kanonischen Variablen wurde schon vor langem bewiesen<sup>9</sup>. Ableitungen längs der Weltlinie seien durch  $\{H_u, \}$  eingeführt. Um die Poisson-Klammern zu erhalten, postulieren wir die Erhaltungssätze, relativistische Kovarianz und andere offenbare Notwendigkeiten. Zum Beispiel müssen, damit man in Abwesenheit äußerer Kräfte konstante  $p_j$  hat, alle  $p$ - und  $u$ -Komponenten sowohl wie  $p_j$  und  $m$  kommutieren. Die Definition  $x_j' = \{H_u, x_j\} = u_j$  führt zu der Klammer, die Heisenbergs Relation entspricht:  $\{p_i, x_k\} = \delta_{ik}$ , usw. Alle Einzelheiten sind in C gegeben<sup>10</sup>.

Betrachten wir auch diesen Formalismus von einem mehr physikalischen Standpunkte. Das Prinzip, das den Ring der Poisson-Klammern für die  $u_j$  eröffnet, ist der Drehimpulssatz<sup>11</sup>. Der Bahndrehimpuls  $[rp]$  allein ist nicht konstant. Sehr

<sup>8</sup> J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 [1951], Appendix B.

<sup>9</sup> Außer I siehe W. Wessel, Phys. Rev. **76**, 1512 [1949].

<sup>10</sup> Siehe auch den Innsbrucker Tagungsbericht, Physikal. Verhandl. **4**, 157 [1953].

<sup>11</sup> Leon T. Anderson, PhD-Thesis Ohio State University, Columbus, Ohio 1952. Siehe C, Fußnote 8.

ähnlich wie in Diracs Theorie des Elektrons folgt (für Zentralkräfte)

$$d[\mathbf{r}\mathbf{p}]/ds = \{H_u, [\mathbf{r}\mathbf{p}]\} = [\mathbf{u}\mathbf{p}], \quad (2.2)$$

und wie bei Dirac wird der Satz wiederhergestellt, indem man zu  $[\mathbf{r}\mathbf{p}]$  einen Vektor  $\hbar \mathfrak{M}$  hinzufügt, der die komplementäre Änderung erfährt. Dies führt willkürfrei zu

$$\hbar \{u_j M_{ik}\} = u_i \delta_{kj} - u_k \delta_{ij} \quad (2.3)$$

mit seinen weiteren Konsequenzen. Offenbar führt man hiermit den Spin ein, und die Vervollständigung des Poisson-Klammerringes unter Gesichtspunkten der Kovarianz führt auch richtig zu den üblichen Regeln für den Spin. Nun verlangen die Vorstellungen, die der Einführung von  $H_u$  als Hamiltonscher Funktion zugrunde liegen, auch eine Veränderlichkeit des Bahndrehimpulses, aber von ganz anderer Art, nämlich seine stetige Abnahme infolge der Bremskraft der Strahlung. Der Drehimpuls ( $\mathfrak{Y}$ ), der pro Zeiteinheit vom Licht durch eine große, eine bewegte Ladung einschließende Hüllfläche getragen wird, wurde schon von Abraham<sup>12</sup> zu

$$d\mathfrak{Y}/dt = (2e^2/3c^3) [\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}] \quad (2.4)$$

berechnet, und mit der Technik von Diracs Arbeit<sup>6</sup> kann dies zu der kovarianten Feststellung verfeinert werden, daß der Drehimpulsverlust durch Ausstrahlung bei der Bewegung des Teilchens längs seiner Weltlinie durch

$$d[\mathbf{r}\mathbf{p}]/ds = - (2e^2/3c) [\mathbf{u}\mathbf{u}'] \quad (2.5)$$

gegeben ist.

Die Formeln (2.2) und (2.5) werden nun vollkommen identisch, wenn man den Vektor  $\mathbf{p}$  auf der rechten Seite von (2.2) durch den Vektor  $\mathbf{g}$  (der sich für die in Frage kommenden Felder auf  $\mathbf{p}$  reduziert) von Gl. (1.5) ersetzt. Eine Bemerkung über die Gültigkeit von (1.5) wird weiter unten folgen; indem wir sie vorläufig voraussetzen, finden wir, da der Gesamtdrehimpuls durch die Ergänzung von  $\mathfrak{M}$  konstant wird, daß der ausgestrahlte Bahndrehimpuls in ganz entsprechender Weise im Spin mitgezählt wird wie die ausgestrahlte Energie in der Ruhmasse. Dieses Gleichverhalten ist zu erwarten, und man darf sich nicht daran stoßen, daß der Spin bei uns auch halb ganz sein kann, während der Drehimpuls des Feldes immer ganz ist. Solange er sich ändert, ist er weder das eine noch das andere. Es muß nur die Möglichkeit seiner Veränderung gegeben sein, d. h. der

Spin — und zwar sein Absolutbetrag, nicht nur seine Komponenten — muß ebenso wie die Masse eine Matrix sein, die nicht mit der Hamilton-Funktion kommutiert. Die Verhältnisse sind dann genau wie in C, Abschnitt II, bei der Ruhmasse. In der Tat werden unsere Darstellungen nicht durch einen bestimmten Spin, sondern durch seinen Minimalwert  $I$  gekennzeichnet, der ganz oder halb ganz sein kann. Die Spinmatrix hat die Eigenwerte  $I, I+1, I+2, \dots$  und kommutiert nicht mit  $H_u$ . Sie kommutiert aber mit der Ruhmasse, so daß man von den Werten der Ruhmasse bei gegebenem Spin sprechen kann.

Eine Bewegung, die zugleich den scheinbar so disparaten Gln. (2.2) und (2.5) entspricht, ist natürlich von sehr ungewöhnlichem Typ und nur annehmbar in Verbindung mit einer vernünftigen Bewegung des Schwerpunktes. In der Tat genügt unser Impulsvektor der klassischen Gl. C (6.8). Das Verhalten der  $u_j$  ist neuerdings von Czyzak<sup>13</sup> für den feldfreien Fall studiert worden. Es zeigt sich, daß unter geeigneten Anfangsbedingungen, auf die wir sogleich zurückkommen werden, eine rein periodische Bewegung existiert, die durch

$$\mathbf{v}/c = \{\mathbf{u}_0 - e \sin(3m_0 c^2/2e^2) s\}/u_0^4 \quad (2.6)$$

beschrieben wird. Hier ist  $\mathbf{u}_0$  ein willkürlicher konstanter Vektor,  $u_0^4$  ist gleich  $(1 + u_0^2)^{1/2}$ , und  $e$  ist ein Einheitsvektor senkrecht zu  $\mathbf{u}_0$ . Wenn der Sinus den Wert 1 erreicht, so ist der Absolutbetrag des Vektors auf der rechten Seite von (2.6) gleich eins, und die Partikel erreicht die Lichtgeschwindigkeit. Wir haben etwas der Schrödingerschen Zitterbewegung sehr Ähnliches, mit dem Unterschiede, daß die Geschwindigkeit nicht dauernd gleich  $c$  ist und daß die Frequenz im Verhältnis  $3\hbar c/2e^2$  größer ist.

Eine solche Bewegung ist wohl recht unreal, und wir werden uns auch nicht weiter dabei aufhalten, denn klassische Kinematik pflegt in der Quantenmechanik von geringer Bedeutung zu sein. Diese Pseudo-Zitterbewegung wurde jedoch in der orientierenden Arbeit III sehr nützlich für eine qualitative Beschreibung der Lambshift gefunden, und es scheint wünschenswert, soweit eine Wahl besteht, an diesem Bewegungstyp festzuhalten. In der Tat ist sein Auftreten an eine besondere Art von Anfangsbedingungen gebunden, die sich allgemein ohne Rücksicht auf die Beschränkungen

<sup>12</sup> M. Abraham, Phys. Z. **15**, 914 [1914].

<sup>13</sup> S. J. Czyzak, Amer. J. Physics **22**, 335 [1954].

von Czyzaks Fall kennzeichnen lassen. Die Gültigkeit seiner Lösung ist sehr beschränkt; nicht nur hat die Bewegung kräftefrei zu sein, sondern auch die Bewegungsgleichung, der sie genügt, ist nur ein Sonderfall der allgemeinen Bewegungsgleichungen (C, Abschn. IV), die durch unsere Poisson-Klammern induziert werden, wie ausführlich in C diskutiert. Nur dann ist (1.5) zutreffend, während im allgemeinen  $u_j$  einer komplizierteren Bewegungsgleichung genügt, ein Punkt, der auch für einen kritischeren Vergleich von (2.2) und (2.5) im Auge zu behalten ist. In jedem Fall kann man zwei Bewegungsklassen unterscheiden, nämlich solche mit zeitartigem und mit raumartigem  $p_j$  (das für die kräftefreie Bewegung eine Integrationskonstante ist). Die periodischen Lösungen gehören zu raumartigem  $p_j$ , während die zu zeitartigem  $p_j$  aperiodisch sind und eine abgemilderte Form der sogenannten „run-away-solutions“ bilden. Wir sind an dem periodischen Typ interessiert, aber wir können nur zeitartige  $p_j$  zulassen, und glücklicherweise besteht eine Möglichkeit, diese Eigenschaften zu vereinbaren. Wir haben schon, aus mehr formalen Gründen, in III davon Gebrauch gemacht. Der schiefsymmetrische Tensor  $M_{ik}$ , der durch (2.3) eingeführt wird und dessen  $\mathfrak{M}$ -Komponenten die Rolle des Spins spielen, bildet nämlich bei Verjüngung mit dem zeitartigen Vektor  $u_j$  einen raumartigen Vektor  $U_j$ , und diese beiden Vektoren spielen in unserm formalen Apparat eine ganz symmetrische Rolle. Insbesondere erhält man, wenn man die  $u$ 's in Czyzaks Grundgleichungen durch die  $U$ 's ersetzt (mit sinngemäßen Vorzeichenänderungen), die Alternative: raumartige  $p_j$  und aperiodische Bewegung oder zeitartige  $p_j$  und periodische Bewegung. Während nun ein zeitartiger Impuls unerlässlich ist, kann man wohl versucht sein, diese Eigenschaft für die Geschwindigkeit zu opfern, und man wird in der Tat finden, daß dieser Wechsel für die sinnvolle Lösung des Eigenwertproblems entscheidend ist. Wie gewöhnlich erhält man diskontinuierliche Eigenwerte nur für periodische Bewegung. Mit Hinblick darauf werden wir die  $u_j$  und  $U_j$  vertauschen und weiterhin als Hamiltonsche Funktion

$$H_U = U_j g^j + m c \quad (2.7)$$

benutzen, mit Poisson-Klammern wie zuvor. Damit wird die „Geschwindigkeit“ unseres Elektrons größer als  $c$ , denn wir haben nun

$$x_j' = \{H_U, x_j\} = U_j. \quad (2.8)$$

### III

Die Umdeutung der Poisson-Klammern in Vertauschungsrelationen erfolgt wie in früheren Arbeiten<sup>9, 14</sup>. Wir erinnern nur an das Prinzip und stellen einige im folgenden benötigte Formeln zusammen. Das übliche Verfahren: Ersatz der linken Seiten durch Kommutatoren (im folgenden durch rechteckige Klammern angedeutet) und Multiplikation der rechten Seiten mit  $\hbar/i$  läßt sich nur in wenigen Fällen anwenden, weil die meisten der Poisson-Klammern rechte Seiten mit nichtvertauschbaren Faktoren haben. Dies wird behoben durch die Einführung eines neuen Paares von Vierervektoren  $\iota_j$  und  $\varkappa_j$ , die

$$\varkappa_j \varkappa^j = I^2 + K^2 = -\iota_j \iota^j \quad (3.1)$$

genügen (für die Einzelheiten siehe I), wo die (vertauschbaren)  $I$  und  $K$  mit den beiden Invarianten des Momententensors ( $M_{ik}$ , siehe oben) verknüpft sind. Mit ihrer Hilfe werden die früheren (Einheits-)Vektoren ausgedrückt als

$$u_j = \frac{\iota_j}{\sqrt{I^2 + K^2}}, \quad (3.2)$$

$$U_j = \frac{\varkappa_j}{\sqrt{I^2 + K^2}}.$$

Die  $\iota_j$ ,  $\varkappa_j$  haben dann Poisson-Klammern, die sich in der üblichen Weise verwandeln lassen. In der vorliegenden Arbeit brauchen wir nur die drei Vertauschungsregeln

$$[\iota^4 \varkappa^4] = iK, [K \iota^4] = i\varkappa^4, [\varkappa^4 K] = -i\iota^4. \quad (3.3)$$

Die Invariante  $I$ , der Minimalspin, ist das Zentrum der Algebra, d. h. sie verhält sich wie eine gewöhnliche Zahl. Man beachte das Zustandekommen der Irrationalität.

Die Ruhmasse kann als Invariante nur von  $I$  und  $K$  abhängen. Um die Bewegungsgleichung (1.4) zu erfüllen, muß sie von der Form  $m_0 \mathfrak{C} \circ \mathfrak{I} I K$  sein mit

$$I = 3\hbar c/2e^2. \quad (3.4)$$

Diese Funktion, oder vielmehr die gleich folgende Funktion (3.5), ist für das Folgende vor allem wichtig. Ihre Begründung wurde zuerst in II mit einigen Einschränkungen gegeben. Einen übersichtlicheren Beweis findet man in C, Abschn. VI, wo (1.4) direkt daraus hergeleitet wird, sowie am Ende von Czyzaks Arbeit<sup>13</sup>. Wenn die  $u_j$  durch

<sup>14</sup> Für eine Übersicht über die mathematische Literatur siehe W. Wessel, Phys. Rev. **83**, 1013 [1951], Abschnitt II.



$U_j$  ersetzt werden, muß man den  $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{j}$  durch einen  $\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}$  ersetzen:

$$m = m_0 \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} \mathfrak{I} \mathfrak{K}, \quad (3.5)$$

wie sich in ganz ähnlicher Weise ableiten läßt. Indem wir  $U_j$  von (3.2) und  $m$  von (3.5) in (2.7) einsetzen und beachten, daß der Integralwert von  $H$  gleich Null ist, erhalten wir

$$\kappa_j g^j = -\sqrt{I^2 + K^2} m_0 c \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} \mathfrak{I} \mathfrak{K} \quad (3.6)$$

als allgemeine Wellengleichung. Für das Massen-Eigenwertproblem ersetzen wir die  $g^j$  durch  $p^j$  und gehen zum Schwerpunktssystem über:  $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ ,  $p^4 = mc$ , wo  $m$  der Eigenwert ist. Die Gleichung reduziert sich dann (mit  $\kappa^4 = -\kappa_4$ ) auf

$$m \kappa^4 = m_0 \sqrt{I^2 + K^2} \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} \mathfrak{I} \mathfrak{K}. \quad (3.7)$$

Nachdem  $\kappa^4$  und  $K$  von der Analyse von (3.3) wohlbekannt sind, sogar in verschiedenen Darstellungen (siehe weiter unten), scheint die  $m$ -Bestimmung nur noch ein mathematisches Problem zu sein. Es bleiben aber noch zwei Realitätsfragen zu lösen. Man wird natürlich versuchen, alle in (3.6) auftretenden Größen in hermitescher Form zu haben, und das ist ohne weiteres möglich; wir haben uns ja überhaupt nur mit hermiteschen Darstellungen befaßt. Die Größe  $K$  hat dann ein kontinuierliches Spektrum von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , und  $I$  ist  $1/2$  für eine Partikel mit diesem Minimalspin. Der erste Punkt ist nun, daß in diesen Darstellungen die klassische Gl. (3.1) durch dieselbe Gleichung mit  $I^2 + K^2 - 1$  ersetzt wird. Nach den eben gemachten Feststellungen ist das nicht immer positiv; dementsprechend ist die rechte Seite von (3.7), wenn sie entsprechend umgeschrieben wird, nicht immer reell. Das ist nicht besonders beunruhigend, denn klassische Gesetze können selten in quantentheoretische Gesetze umgeschrieben werden ohne Hinzufügung oder Auslassung von Termen wie 1 oder  $1/2$ , und wir glauben eine sehr annehmbare Lösung für dieses Problem gefunden zu haben. Der schwierigere Punkt ist, daß, auch wenn beide Seiten von (3.7) hermitesch sind, dies nicht notwendig reelle Eigenwerte von  $m$  bedeutet, weil  $\kappa^4$  und  $K$  nicht vertauschbar sind. Wenn die rechte Seite von (3.7) kurz  $m_I(K)$  geschrieben wird, ist  $m$  gleich

$$m = (\kappa^4)^{-1} m_I(K), \quad (3.8)$$

und das ist nicht hermitesch. Auch

$$(\kappa^4)^{-1/2} m_I(K) (\kappa^4)^{-1/2}$$

ist nicht hermitesch, weil  $\kappa^4$  negativ sein kann (es hat dasselbe Spektrum wie  $K$ ); und additive Symmetrisierung paßt sich nicht in eine invariante Gleichung wie (3.6) ein. Nun kann auch eine nicht-hermitesche Matrix reelle Eigenwerte haben; es dürfte nur für einen so intrikaten Operator wie (3.8) schwerlich möglich sein, ohne eingehende Untersuchung Voraussagen zu machen. Eine solche Untersuchung folgt hier, mit dem schon in der Einleitung berichteten Ergebnis. Eine weitergehende Umgestaltung von  $m_I(K)$ , als wir sie hier vornehmen, möchte vielleicht geeignet sein, vollständige Realität der Eigenwerte herbeizuführen, doch halten wir aus den angegebenen Gründen solche Versuche für unphysikalisch.

Die Quadratwurzel in (3.7) ist wohldefiniert nur in einer Darstellung, in der  $K$  diagonal ist; daher ist es naturgemäß, damit zu beginnen.  $\iota^4$  und  $\kappa^4$  sind dann zufolge III, Gl. (1.22), Differenzoperatoren der Form

$$\left. \begin{array}{l} \iota^4 \\ \kappa^4 \end{array} \right\} \chi(K) = (\sigma - iK)(\sigma + iK + 1) \chi(K - i) \pm \frac{1}{4} \chi(K + i). \quad (3.9)$$

Diese Operatoren sind eine hermitesche Darstellung von (3.3). Die Größe  $\sigma$  ist der Spin. Er erscheint hier als eine reine Zahl mit den möglichen Werten  $I, I+1, I+2, \dots$ . Natürlich ist er nicht durch (3.3) allein bestimmt, sondern nur in Verbindung mit den andern Vertauschungsrelationen.

Gl. (3.7) wird mit (3.9) eine Differenzgleichung. Die Irrationalität auf der rechten Seite von (3.7) fügt sich dem natürlich sehr schlecht ein, mit oder ohne zusätzliches  $-1$ , weil sie selbst keiner einfachen Differenzgleichung genügt. Man kann das zum Anlaß nehmen, nach einer solchen Differenzgleichung zu suchen. Auf den ersten Blick erscheint das nicht als sehr aussichtsreich, denn die Differentialgleichung, der die Quadratwurzel genügt (z. B. als Funktion von  $K$ ),

$$\partial \sqrt{I^2 + K^2} / \partial K = K / \sqrt{I^2 + K^2}, \quad (3.10)$$

ist nicht linear. Mit etwas Probieren findet man aber, daß eine verhältnismäßig einfache reelle Funktion existiert, die eine ganz analoge, nicht-lineare Differenzgleichung erfüllt, nämlich

$$\theta(I, K) = \frac{2\pi \left( \frac{I+iK}{2} \right) \pi \left( \frac{I-iK}{2} \right)}{\pi \left( \frac{I+iK-1}{2} \right) \pi \left( \frac{I-iK-1}{2} \right)}. \quad (3.11)$$

Das Symbol  $\pi$  bedeutet die  $\pi$ -Funktion. Unter Benutzung ihrer Rekursionsformel

$$\Pi(x+1) = x \Pi(x)$$

findet man nach einigen Manipulationen

$$\theta(K) \theta(K+i) = (I-iK+1)(I+iK). \quad (3.12)$$

Dank der Realität von  $\theta$  gilt die gleiche Formel auch mit  $-i$  statt  $i$ . Infolgedessen hat man

$$\frac{1}{2i} \{ \theta(K+i) - \theta(K-i) \} = \frac{K}{\theta(K)} \quad (3.13)$$

in klarer Korrespondenz mit (3.10). Wir werden daher  $\sqrt{I^2 + K^2}$  im Sinne einer quantenmechanischen Umdeutung durch  $\theta(K)$  ersetzen. Natürlich läßt sich ein solcher Schritt nicht vollkommen eindeutig machen; man könnte ja ohne Verlust der Korrespondenz auch etwa  $I$  durch  $I+1$  ersetzen. Der Vorzug der gegenwärtigen Formulierung wird erst hervortreten, wenn wir die Funktion in (3.7) verwenden: sie paßt dort wie ein Schlüssel. Wir ersetzen also in dieser Gleichung die Quadratwurzel durch (3.11), führen  $\kappa^4$  von (3.9) als Differenzenoperator ein und setzen der Kürze halber

$$m/m_0 = \mu. \quad (3.14)$$

Indem wir die Gleichung dann auf eine Eigenfunktion  $\chi(K)$  anwenden, erhalten wir schließlich

$$\mu \{ (\sigma - iK)(\sigma + iK + 1) \chi(K-i) - \frac{1}{4} \chi(K+i) \} = \theta(K) \mathfrak{S} \sin \Gamma K \cdot \chi(K). \quad (3.15)$$

Das übrige ist eine rein mathematische Theorie des hiermit gesetzten Eigenwertproblems. Wir werden von Gl. (3.15) ausgehen, obwohl auch Gl. (3.8) nicht ungeeignet sein möchte. Die Eigenfunktionen von  $\kappa^4$  sind von dem konfluent-hypergeometrischen Typ, der recht gut untersucht ist<sup>15</sup>.

#### IV

Um Gl. (3.15) zu vereinfachen, führen wir eine neue Eigenfunktion  $Y(K)$  ein durch

$$\chi(K) = 2^{-iK} \Pi(I-iK) Y(K) : \Pi\left(\frac{I+iK}{2}\right) \Pi\left(\frac{I-iK}{2}\right). \quad (4.1)$$

Einsetzen in (3.15) führt nach einigen Reduktionen zu

$$\begin{aligned} (\mu/2) \{ (\sigma - iK)(\sigma + iK + 1) Y(K-i) \\ - (I-iK)(I+iK+1) Y(K+i) \} \\ = (I-iK)(I+iK+1) \mathfrak{S} \sin \Gamma K \cdot Y(K). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Für den Zustand niedrigsten Spins,  $\sigma = I$ , reduziert sich diese Gleichung auf

<sup>15</sup> H. Buchholz, Die konfluente hypergeometrische Funktion, Springer 1953.

$$(\mu/2) \{ Y(K-i) - Y(K+i) \} = \mathfrak{S} \sin \Gamma K \cdot Y(K), \quad (4.3)$$

worin sich die große Vereinfachung durch die Wahl von  $\theta$  zeigt. In dieser Form ist die Gleichung nicht geeignet zur Bestimmung der Eigenwerte von  $\mu$ , weil  $K$  eine reelle Variable ist und wir keine Gesichtspunkte für das Verhalten von  $Y(K)$  auf der imaginären Achse haben; sie ist aber sehr geeignet zur asymptotischen Bestimmung von  $Y(K)$ . Zu diesem Zwecke unterwerfen wir (4.3) einer unitären Transformation

$$U(K) = \exp(i \Gamma K^2/2), \quad (4.4)$$

indem wir

$$Y(K) = U y(K) \quad (4.5)$$

setzen und mit  $U^\dagger = \exp(-i \Gamma K^2/2)$  von links multiplizieren. Diese Transformation, die schon in III benutzt wurde, spielt auch eine wichtige Rolle in der klassischen Theorie. Um den Zusammenhang zu zeigen, wenden wir sie etwa auf  $\kappa^4$  an, unter Benutzung der Darstellung (3.9). Es ergibt sich

$$\begin{aligned} U^\dagger \kappa^4 U \chi(K) &= e^{\Gamma K - i \Gamma/2} (\sigma - iK)(\sigma + iK + 1) \chi(K-i) \\ &\quad - e^{-\Gamma K - i \Gamma/2} (1/4) \chi(K+i). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nach denselben Formeln (3.9) haben wir auch

$$\begin{aligned} (\sigma - iK)(\sigma + iK + 1) \chi(K-i) &= \frac{1}{2} (t^4 + \kappa^4) \chi(K), \\ (1/4) \chi(K+i) &= \frac{1}{2} (t^4 - \kappa^4) \chi(K), \end{aligned} \quad (4.7)$$

d. h. es gilt

$$\begin{aligned} U^\dagger \kappa^4 U &= e^{\Gamma K - i \Gamma/2} \frac{1}{2} (t^4 + \kappa^4) - e^{-\Gamma K - i \Gamma/2} \frac{1}{2} (t^4 - \kappa^4) \\ &= e^{-i \Gamma/2} \{ \mathfrak{U} \mathfrak{O} \Gamma K \cdot \kappa^4 + \mathfrak{S} \sin \Gamma K \cdot t^4 \} \end{aligned} \quad (4.8)$$

und ähnlich

$$U^\dagger t^4 U = e^{-i \Gamma/2} \{ \mathfrak{S} \sin \Gamma K \cdot \kappa^4 + \mathfrak{U} \mathfrak{O} \Gamma K \cdot t^4 \}. \quad (4.9)$$

Der komplexe Faktor kommt durch die Nichtvertauschbarkeit von  $K$  und  $t^4$  bzw.  $\kappa^4$  herein und kann auch durch Symmetrisierung ersetzt werden. Danach hat man es offenbar mit der quantentheoretischen Form von C (6.22), (6.23) zu tun, durch die die  $u_j, U_j$  auf die konstanten  $\bar{u}_j, \bar{U}_j$  zurückgeführt werden. Man hat nur den Faktor  $(I^2 + K^2)^{1/2}$  zu ergänzen, der mit der Transformation kommutiert.

Indem wir zunächst an der einfachsten Form unseres Eigenwertproblems, Gl. (4.3), festhalten, erhalten wir durch die eben erwähnte Transformation

$$\begin{aligned} (\mu/2) e^{-i \Gamma/2} \{ e^{\Gamma K} y(K-i) - e^{-\Gamma K} y(K+i) \} \\ = (1/2) \{ e^{\Gamma K} - e^{-\Gamma K} \} y(K). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Für große  $K$ , d. h.  $K$  groß im Vergleich zu der kleinen Größe  $1/I$ , Gl. (3.4), werden wir nur die Terme mit  $e^{IK}$  beizubehalten haben. Die Differenzengleichung reduziert sich dann auf

$$\mu e^{-iI/2} y(K-i) = y(K) \quad (4.11)$$

mit der (bis auf einen Faktor mit der Periode  $i$  eindeutigen) Lösung

$$y(K) = e^{-IK/2} \mu^{-iK}. \quad (4.12)$$

Für große negative  $K$  ergibt sich dieselbe Formel mit  $-K$  an Stelle von  $K$ . Es besteht also ein starkes Verschwinden von  $y(K)$  für unendliche  $K$  bei jedem reellen  $\mu$ , d. h. das Verhalten der Lösungen im Unendlichen gibt keinen Anlaß zu Eigenwerten. Die Frage ist, ob sie bei dem Übergang von positiven zu negativen  $K$  hereinkommen.

Um dies zu untersuchen, gehen wir zu der  $q$ -Darstellung von III über, weil wir dann eine Differentialgleichung auf der reellen Achse mit den üblichen Anfangsbedingungen haben. Dies geschieht dadurch, daß wir  $K$  durch den Operator

$$K = \frac{1}{2i} \left( q \frac{\partial}{\partial q} + 2 \right) \quad (4.13)$$

ersetzen. Damit gehen wir von  $y(K)$  zu einer Funktion  $z(q)$  über durch die unitäre Transformation

$$y(K) = \pi^{-1/2} \int_0^\infty q^{-2iK} z(q) q dq. \quad (4.14)$$

Die Differenzenoperatoren  $\iota^4$  und  $\varkappa^4$  können entsprechend in die weiter unten zu benutzenden Differentialoperatoren transformiert werden. Die folgende Schlußweise vermeidet den expliziten Gebrauch von (4.14).

Der größeren Allgemeinheit halber beginnen wir mit (4.2) an Stelle von (4.3). Mit Rücksicht auf (4.7) läßt sich dafür schreiben

$$\begin{aligned} & (\mu/2) \{ (1/2) (\iota^4 + \varkappa^4) Y(K) \\ & - (I - iK) (I + iK + 1) 2 (\iota^4 - \varkappa^4) Y(K) \} \\ & = (I - iK) (I + iK + 1) \sin IK \cdot Y(K). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Wir führen wieder die Transformation (4.4) aus, unter Benutzung der expliziten Formeln (4.8) und (4.9):

$$\begin{aligned} & (\mu/2) e^{-iI/2} \{ (1/2) e^{IK} (\iota^4 + \varkappa^4) y(K) \\ & - (I - iK) (I + iK + 1) 2 e^{-IK} (\iota^4 - \varkappa^4) y(K) \} \\ & = (I - iK) (I + iK + 1) (1/2) (e^{IK} - e^{-IK}) y(K). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Hier ersetzen wir  $K$  in den Koeffizienten durch (4.13) und  $\iota^4$ ,  $\varkappa^4$  durch die Formeln III (1.8), d. h. durch

$$\frac{1}{2} (\iota^4 + \varkappa^4) = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{3}{4q} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\sigma(\sigma+1)}{q^2} \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{2} (\iota^4 - \varkappa^4) = \frac{q^2}{4}. \quad (4.18)$$

Danach kann einfach  $z(q)$  an Stelle von  $y(K)$  geschrieben werden.

Wir denken uns nun  $z(q)$  in eine Potenzreihe entwickelt. Auf einen von ihren Termen angewandt haben wir nach (4.17):

$$\frac{1}{2} (\iota^4 + \varkappa^4) q^p = -\frac{1}{4} (p-2\sigma)(p+2\sigma+2) q^{p-2} \quad (4.19)$$

oder nach (4.13)

$$\begin{aligned} & (I - iK) (I + iK + 1) q^p \\ & = -\frac{1}{4} (p-2I+2)(p+2I+4) q^p \end{aligned} \quad (4.20)$$

und schließlich mit Rücksicht auf (4.18)

$$\begin{aligned} & (I - iK) (I + iK + 1) 2 (\iota^4 - \varkappa^4) q^p \\ & = -\frac{1}{4} (p-2I+4)(p+2I+6) q^{p+2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ferner findet man, wieder auf Grund von (4.13), d. h.

$$K q^p = \frac{1}{2i} (p+2) q^p, \quad (4.22)$$

durch Potenzreihenentwicklung

$$e^{IK} q^p = e^{-iIp/2-iI} q^p \quad (4.23)$$

oder in Anwendung auf eine analytische Funktion  $z(q)$

$$e^{IK} z(q) = e^{-iI} z(q e^{-iI/2}), \quad e^{-IK} z(q) = e^{iI} z(q e^{iI/2}). \quad (4.24)$$

Damit sind alle in (4.16) erscheinenden Operatoren in eine  $q$ -Darstellung umgerechnet.

Wenn wir nun die Terme von (4.16) betrachten, so wie sie durch die Formeln (4.19) bis (4.24) dargestellt sind, finden wir die Potenz  $p$  immer um keine oder zwei Einheiten verändert. Wir werden also eine Potenzreihe mit  $q^{p+2n}$ ,  $n$  null oder ganz, haben. In der üblichen Weise kann eine charakteristische Gleichung gebildet werden, mit entsprechenden Abwandlungen wegen der  $e$ -Faktoren. Ihre Wurzeln sind  $p=2\sigma$  und  $p=-2\sigma-2$ , was sich durch die Form von (4.19) erklärt. Die zweite ist zu verwerfen, weil  $z(q)$  in (4.14) nicht so stark singulär sein kann. Wir haben also die Entwicklung

$$z(q) = q^{2\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\sigma)} q^{2n}. \quad (4.25)$$

Einsetzen in (4.16) liefert mit Gebrauch von (4.19) bis (4.24), wenn die Koeffizienten aller Potenzen von  $q$  gleich Null gesetzt werden,



$$\begin{aligned}
& (\mu/2) e^{-iI/2} \{ (n+1) (n+2+2\sigma) e^{-iI(n+\sigma+1)} a_{n+1}^{(\sigma)} \\
& - (n+1+\sigma-I) (n+2+\sigma+I) e^{iI(n+\sigma+1)} a_{n-1}^{(\sigma)} \} \\
& = -i (n+1+\sigma-I) (n+2+\sigma+I) \\
& \quad \sin I (n+\sigma+1) \cdot a_n^{(\sigma)}. \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Schließlich lassen sich die komplexen Koeffizienten eliminieren durch den Ansatz

$$a_n^{(\sigma)} = i^{-n} e^{iI(n+\sigma+1)/2} b_n^{(\sigma)}. \quad (4.27)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
& (\mu/2) \{ (n+1) (n+2+2\sigma) b_{n+1}^{(\sigma)} \\
& + (n+1+\sigma-I) (n+2+\sigma+I) b_{n-1}^{(\sigma)} \} \\
& = (n+1+\sigma-I) (n+2+\sigma+I) \sin I (n+\sigma+1) \cdot b_n^{(\sigma)}. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Dies ist die allgemeine Rekursionsformel für beliebige  $\sigma$ . Ihre Auswertung ist wohl nur mit numerischen Mitteln möglich. Wir beschränken uns daher von nun an auf den Fall niedrigsten Spins

$$\sigma = I. \quad (4.29)$$

Die letzte Gleichung lautet dann, mit  $b_n$  für  $b_n^{(I)}$ ,

$$(\mu/2) (b_{n+1} + b_{n-1}) = \sin I (n+I+1) \cdot b_n. \quad (4.30)$$

Sie hat wieder die Einfachheit von Gl. (4.3), aber wir haben nun ein diskontinuierliches  $n$  an Stelle des kontinuierlichen  $K$  und wohldefinierte Anfangsbedingungen, nämlich  $b_{-1} = 0$  und  $b_0 = 1$ , bis auf Normierung. Im übrigen ist der hyperbolische Sinus durch einen gewöhnlichen ersetzt.

## V

Der Leser wird bemerken, daß eine Gleichung wie (4.30) eine geschlossene Lösung hat, wenn  $I$  als ein rationales Vielfaches von  $\pi$  geschrieben werden kann, weil sich dann die  $b_n$  nach einer endlichen Periode in einer linearen Weise wiederholen. Die entsprechenden Terme in jeder Periode der Reihe (4.25) bilden eine geometrische Reihe, die für genügend kleine  $\rho$  summiert und dann analytisch fortgesetzt werden kann. Die Ausführbarkeit dieses Verfahrens hängt nur von der Länge der Periode ab, und die ist nicht zu lang, wenn man eine geringe Ungenauigkeit in Kauf nimmt. Der gegenwärtig angenommene Reziprokwert der Feinstrukturkonstanten ist<sup>16</sup>

$$\hbar c/e^2 = 137,0377 \pm 0,0016. \quad (5.1)$$

Nimmt man

$$I/2 = 3\hbar c/4e^2 = 32\pi + 5\pi/7, \quad (5.2)$$

so hat man

$$\hbar c/e^2 = 916\pi/21 = 137,0333 \dots \quad (5.3)$$

in Übereinstimmung mit (5.1) mit einer geringen Verletzung der Genauigkeitsgrenzen. Wir werden uns im folgenden begnügen, (5.2) zu benutzen, nicht als eine Mutmaßung über den wahren Wert der Feinstrukturkonstanten, sondern lediglich im Sinne einer Begrenzung des rechnerischen Aufwandes. Unsere numerischen  $\mu$ -Werte werden nur von mäßigem Interesse sein; wir werden aber entscheiden können, ob sie diskontinuierlich sind oder nicht, und das wird nicht durch kleine Abweichungen der Zahl  $I$  von dem angenommenen Werte beeinflusst werden. Man muß sich andererseits hüten, die folgenden Gleichungen lediglich deswegen, weil ungewöhnliche Zahlenkoeffizienten darin eingehen, für unphysikalisch und das einfache Ergebnis für einen bloßen Zufall zu halten. Krause Zahlenkoeffizienten sind in Verbindung mit der Feinstrukturkonstanten zu erwarten, und für einen Zufall bietet unsere Deduktion doch wohl wenig Raum. Auch daß die Konstante  $I$  nur bis auf ein Vielfaches von  $2\pi$  in das folgende eingeht, scheint uns keineswegs unbefriedigend. Es besteht kein Grund zu glauben, daß die Feinstrukturkonstante durch die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes allein erklärbar sein sollte.

Für die numerische Berechnung muß nun auch das  $I$  von Formel (4.29) festgelegt werden. Wie mehrmals bemerkt, bestimmt diese Invariante den niedrigsten Eigenwert der Spinmatrix, die wie alle andern unendlich ist, wenn man auf Hermitezität besteht. Es ist diese Eigenschaft, die die in der Einleitung erwähnte Schwierigkeit mit der Feinstruktur hervorruft, und es dürfte hier eine Bemerkung am Platze sein, um das Festhalten an unserm Versuche zu rechtfertigen. Eine Abänderung der Wellengleichung unter klassischen Gesichtspunkten wurde schon in C diskutiert, doch dürften solche Betrachtungen schwerlich ausreichen, sie willkürfrei zu machen. Ein triftigeres Argument scheint uns folgendes. Das störende Element in der Wellengleichung (3.6) ist die Matrix  $\kappa^4$  mit ihrem kontinuierlichen Spektrum. Diese Eigenschaft ist lorentzinvariant, wie ausführlich diskutiert<sup>9</sup>. Nun haben wir im Schwerpunktsystem, wie wir gerade im Begriff sind zu zeigen, ein diskretes Energie-, d. h. Massenspektrum. Die Kontinuität von  $\kappa^4$  (und von  $K$ ) hat also nichts zu tun mit der Kontinuität der Energie bei

<sup>16</sup> J. W. M. DuMond and E. R. Cohen, Rev. Mod. Phys. **25**, 691 [1953].

der kräftefreien Bewegung; denn diese läßt sich ja durch Übergang zum Schwerpunktssystem wegtransformieren, wobei das kontinuierliche Element die Parameter der Lorentz-Transformation sind. Auf der andern Seite haben wir eine natürliche Unschärfe der Energieniveaus in Gegenwart äußerer Kräfte als Folge der Strahlungsreaktion, und hier müßte in einer Theorie, die die Strahlungsreaktion in die Matrizen der Wellengleichung steckt, der kontinuierliche Charakter von  $\kappa^4$  ins Spiel treten. Nun ist die Strahlungsverbreiterung schmaler als die relativistische Feinstruktur. In einer angemessenen Darstellung sollte sich also der kontinuierliche Charakter von  $\kappa^4$  erst auf der nächsten Näherungsstufe äußern, und in demselben Maße sollte sich die Störung der Feinstruktur automatisch auf die Lambshift reduzieren. Einen rohen, aber recht erfolgreichen Versuch in dieser Richtung haben wir ja schon in III gemacht. Es sollte sich nur darum handeln, dieses Verfahren auf eine klare Unitärtransformation zurückzuführen. Die Frage ist, welche Darstellung dafür „angemessen“ ist, und die natürliche Antwort scheint zu sein, daß es die ist, in der der Massenoperator diagonal ist; und das ist diejenige, die wir im Begriff sind herzustellen.

In diesem Sinne setzen wir nun also

$$I = \frac{1}{2}. \quad (5.4)$$

Indem wir (5.2) und (5.4) einführen und zur Bequemlichkeit

$$\mu/2 = 1/\eta \quad (5.5)$$

setzen, bringen wir (4.30) in die Form

$$b_{7n+k} = \varepsilon_k b_{7n+k-1} - b_{7n+k-2} \quad (5.6)$$

mit

$$\varepsilon_k = \eta \sin(4k+2)\pi/7. \quad (5.7)$$

Diese Koeffizienten wiederholen sich nach sieben Schritten, und man kann jedes  $b_{7n+k}$ ,  $k \geq 1$ , durch  $b_{7n}$  und  $b_{7n-1}$  in der Form

$$b_{7n+k} = u_k b_{7n} - v_k b_{7n-1} \quad (5.8)$$

darstellen, wo die  $u_k, v_k$  Funktionen der  $\varepsilon_k$  sind, jedoch nicht mehr von  $n$  abhängen. Man hat insbesondere

$$b_{7n+7} = u_7 b_{7n} - v_7 b_{7n-1} \quad (5.9)$$

und, wenn man  $n$  durch  $n+1$  ersetzt und (5.8) mit  $k=6$  benutzt:

$$b_{7n+14} = u_7 b_{7n+7} - v_7 (u_6 b_{7n} - v_6 b_{7n-1}). \quad (5.10)$$

Aus diesen beiden Gleichungen läßt sich  $v_{7n-1}$  eliminieren, und es bleibt

$$b_{7n+14} + (v_6 - u_7) b_{7n+7} + (u_6 v_7 - u_7 v_6) b_{7n} = 0, \quad (5.11)$$

d. i. eine lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten für  $b_{7n}$ . Die Liste der  $u_k, v_k$  lautet

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$u_k$	1	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_1 \varepsilon_2 - 1$	$-\varepsilon_1$	1	0	$-1$	$-\varepsilon_0$
$v_k$	0	1	$\varepsilon_2$	$-1$	0	1	$-\varepsilon_0$	$-\varepsilon_0^2 - 1$

Tab. 1.

Sie befolgen als allgemeine Regel

$$u_k v_{k+1} - u_{k+1} v_k = 1, \quad (5.12)$$

und im besonderen gilt

$$v_6 - u_7 = 0; \quad (5.13)$$

daher reduziert sich die Differenzengleichung (5.11) auf

$$b_{7n+14} + b_{7n} = 0 \quad (5.14)$$

mit der allgemeinen Lösung<sup>17</sup>

$$b_{7n} = A i^n + B (-i)^n. \quad (5.15)$$

Es folgt aus (5.9) mit Einsetzen von  $u_7$  und  $v_7$  aus Tab. 1:

$$b_{7n-1} = A i^n (\varepsilon_0 - i)^{-1} + B (-i)^n (\varepsilon_0 + i)^{-1}, \quad (5.16)$$

und für  $n=0$  mit den Anfangsbedingungen  $b_0 = 1$ ,  $b_{-1} = 0$ :

$$A = \frac{1}{2} (1 + i \varepsilon_0), \quad B = \frac{1}{2} (1 - i \varepsilon_0). \quad (5.17)$$

Hiernach lassen sich zuerst  $b_{7n}$  und  $b_{7n-1}$  und sodann mit (5.8) die allgemeinen  $b_{7n+k}$  als lineare Kombinationen von  $i^n$  und  $(-i)^n$  bilden. Die Reihe (4.25), in der  $\sigma = 1/2$  zu setzen ist, wird dann einfach eine Summe von sieben geometrischen Reihen, denn auch der Term mit  $n^2$  in (4.27) läßt sich auf einen Term mit  $n$  reduzieren. Unter Auslassung weiterer Einzelheiten gehen wir direkt über zu

$$z(\varrho) = \frac{\varrho}{1 - \varrho^{28}} \sum_{k=0}^6 e^{(5i\pi/7)(k+3/2)^2} i^{-k} \cdot \{u_k + i \varrho^{14} (v_k - \varepsilon_0 u_k)\} \varrho^{2k}. \quad (5.18)$$

Die höchste Potenz in der Summe ist  $\varrho^{24}$ , weil  $v_6 - \varepsilon_0 u_6 = 0$  ist; daher verhält sich  $z(\varrho)$  im Unendlichen wie  $\varrho^{-3}$ . Bei  $\varrho=0$  liegt keine Singularität,

<sup>17</sup> N. E. Nørlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924.

so daß das Integral (4.14) an beiden Grenzen konvergiert. Es besteht nur eine Singularität auf der positiven reellen Achse, nämlich die einfache Wurzel des Nenners bei  $\varrho = 1$ . Um diese zu heben, muß die Summe über  $k$  an diesem Punkte verschwinden, und das gibt eine Eigenwertbedingung.

Wir trennen zunächst Real- und Imaginärteil des Polynoms für  $\varrho = 1$  unter Benutzung von Tab. I und Formel (5.7). Wenn man nach Potenzen von  $\eta$  ordnet und versuchsweise beide Teile gleich Null setzt, hat man mit den Abkürzungen

$$\sin p \pi/7 = s_p, \quad \cos p \pi/7 = c_p \quad (5.19)$$

die simultanen Gleichungen

$$\begin{aligned} & \eta^3 s_1^2 s_2 s_3 - \eta^2 c_1 s_1 (2 s_2 - s_3) \\ & - \eta s_1 (2 s_1 - s_2 + s_3) - 2 + 2 c_3 + 3 c_1 = 0, \quad (5.20) \\ & \eta^3 c_1 s_1 s_2 s_3 - \eta^2 s_1^2 (2 s_2 + s_3) \\ & + \eta (2 c_1 s_1 + c_1 s_2 - c_1 s_3 - 2 s_2) + s_1 + 2 s_3 = 0. \end{aligned}$$

Eine Technik für das Arbeiten mit solchen Termen ohne Zuhilfenahme von Zahlen, die sich auf eine algebraische Eigenschaft von  $\cos \pi/7$  gründet, findet man in Anhang III. Mit ihrer Hilfe ergibt sich, daß die Formeln (5.20) identisch sind und sich durch die einzige Gleichung

$$\left(\frac{\eta}{2}\right)^3 - (2 \cos \pi/7 - 1) \left\{ \left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{2}\right) \right\} + 1 = 0 \quad (5.21)$$

darstellen lassen. Eine Lösung ist offenbar  $\eta/2 = -1$ , und danach bleiben noch  $\eta/2 = e^{\pm i\pi/7}$ . Nach (5.5) gelten dieselben Werte für  $\mu$ :

$$\mu = (e^{i\pi/7}, -1, e^{-i\pi/7}). \quad (5.22)$$

Sie bilden eine unitäre Matrix. Die Real- und Imaginärteile von  $e^{i\pi/7}$  sind 0,90098 und 0,43391.

Wie wir uns die Deutung der komplexen Eigenwerte denken, wurde schon in der Einleitung gesagt. Der Imaginärteil entspricht einer Übergangswahrscheinlichkeit, wie man sie erhält, wenn man in der Einsteinschen Formel die Frequenz durch die Zitterfrequenz von (2.6) und die Amplitude durch einen Elektronenradius ersetzt.

Von größerem Interesse dürfte die folgende Bemerkung sein. Wir fanden in (4.12) eine sehr einfache asymptotische Form für unsere Eigenfunktionen. Wenn die  $\mu$  reell wären, hätte man

$$|y(K)|^2 = e^{-TK}. \quad (5.23)$$

Diese Funktion ist, wie schon bemerkt, als Lösung einer Differenzengleichung nur bis auf einen in  $iK$  periodischen Faktor bestimmt und kann nur damit an (4.14) angeschlossen werden; wir wollen sie

aber einmal in dieser einfachsten Form annehmen. Dank dem sehr großen Werte von  $T$  gilt diese Formel schon für sehr kleine  $K$ . Für  $K \gg 1$  kann sie auch mit Hilfe von Stirlings Formel auf  $\chi(K)$  ausgedehnt werden, das durch (4.1) gegeben ist; man beachte dazu, daß laut (4.5)  $|Y(K)|^2 = |y(K)|^2$  ist. Die Form (3.5) des Massenoperators wirkt sich dann dahin aus, daß asymptotisch

$$m = m_0 \Im \ln TK \approx \frac{m_0}{|\chi|^2} \quad (5.24)$$

ist. Dies legt den Gedanken nahe, die Theorie im Sinne von Heisenberg<sup>18</sup> nichtlinear auszubauen. Man könnte damit im wesentlichen im bisherigen Rahmen bleiben, würde aber gleichzeitig die unbequeme transzendente Funktion und die Variable  $K$  los, die die Schwierigkeit mit den komplexen Eigenwerten verursacht.

Ohne solche Nebengedanken scheint uns der wesentliche Punkt des Interesses die Tatsache zu sein, daß die Eigenwerte (5.22) diskret und so stark beschränkt in ihrer Anzahl sind. Das ist wirklich recht wunderbar, da ja in den Gln. (3.7) oder (3.15) beide Seiten kontinuierliche Spektren haben. Es ist in der Tat eine Folge unserer Vertauschung von  $u_j$  und  $U_j$ , d. h. der Vertauschung eines aperiodischen und eines periodischen Bewegungstyps. Wir haben untersucht, was sich ohne das ereignet. Das formale Bild ist weitgehend dasselbe. Der wesentlichste Unterschied ist ein Cosinus an Stelle des Sinus in (4.26). Infolge davon ist das entsprechende  $\varepsilon_3$  nicht Null, und die Berechnung der Koeffizienten wird verwickelter. Wir haben hauptsächlich für diesen Zweck die Technik von Anhang III entwickelt. Die Beziehung (5.12) bleibt bestehen, doch an Stelle von (5.13) hat man nun

$$v_6 - u_6 = -2 (\eta/2)^7. \quad (5.25)$$

Dementsprechend ändert sich die Gl. (5.14), und wir haben in (5.18) das Polynom geteilt durch  $1 - 2(\eta/2)^7 \varrho^{14} + \varrho^{28}$  statt durch  $1 - \varrho^{28}$ , d. h. die Quantenbedingung erlischt für alle negativen Werte von  $\eta$ , was einem kontinuierlichen Spektrum von negativen  $\mu$ -Werten entspricht.

Es bleibt die Frage, was geschieht, wenn man die Zahl  $T$  genauer, d. h. mit einer längeren Periode approximiert. Man erhält dann jedenfalls eine Eigenwertgleichung höheren Grades und hat mehr

<sup>18</sup> W. Heisenberg, *Physica* **19**, 897 [1953]; *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* Nr. 8, 1953; *Z. Naturforschg.* **9a**, 292 [1954].



Eigenwerte und auch eine Störung der vorhandenen zu erwarten. Eine weitere Störung ist bei Einarbeitung des Mehrteilchencharakters in die Theorie als Folge der Vakuumpolarisation zu erwarten. Alles das beeinträchtigt die vorliegenden einfachen Verhältnisse nicht, wenn, wie man wohl annehmen darf, unsere in (5.22) berechneten Eigenwerte die wesentlich tiefsten sind und bleiben, und wenn die beiden konjugiert komplexen bei +1 bei richtiger Quantisierung des Materiefeldes in einen reellen zusammenfallen. Die beiden Eigenwerte werden nicht gerade +1 und -1 sein, sondern, sagen wir,  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$ . Damit kommt man aber wieder auf Diracs Operator zurück, denn eine Matrix mit den Eigenwerten  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  läßt sich als  $\frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2) + \varrho_3 \frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2)$  schreiben, und hier kann der Faktor von  $\varrho_3$  im Wege einer Renormierung in  $m_0$  aufgenommen werden, während der andere einen invarianten additiven Zusatz zur Energie bildet.

### Anhang I

Die zu benutzenden Formeln sind explizit bei Dirac l. c.<sup>6</sup> angegeben. Man hat nur in Verfolgung seiner Entwicklungen (55), (56) l. c. den Nenner in (47) l. c. durch  $\sigma$  zu ersetzen, unter Vernachlässigung eines Terms mit  $\gamma\sigma$ . Das retardierte Potential für eine Ladung  $e$  lautet dann in unserer Schreibweise

$$A_\mu \text{ ret} = e (u_\mu - \sigma u_\mu' \dots) / \sigma. \quad (\text{I.1})$$

Das avancierte Potential wird (man bemerke, daß der Nenner wesentlich positiv ist)

$$A_\mu \text{ adv} = e (u_\mu + \sigma u_\mu' \dots) / \sigma \quad (\text{I.2})$$

und dementsprechend wird

$$A_\mu = \frac{1}{2} (A_\mu \text{ ret} - A_\mu \text{ adv}) = -e u_\mu'. \quad (\text{I.3})$$

Im Text führen wir  $e$  mit dem negativen Zeichen, wie in früheren Arbeiten.

### Anhang II

Für ein punktförmiges Elektron mit der Ladung  $e$ , das sich mit der (Vierer-)Geschwindigkeit  $u$  bewegt, läßt sich das Vektorpotential nach Dirac<sup>4</sup>

$$\mathfrak{A} = e \int_{-\infty}^s u(s) \Delta(x - x_s) ds \quad (\text{II.1})$$

schreiben. Wir entwickeln die  $\Delta$ -Funktion wie l. c. § 74 (mit  $i$  statt  $-i$  wegen unserer Metrik) und setzen in (II.1) ein. Der longitudinale Teil von  $\mathfrak{A}$  wird

$$\mathfrak{A}_l = (ei/4\pi^2) \int_{-\infty}^s ds \int d^4k \cdot n(u n) \Delta(k) e^{i\mathfrak{k}(r-r_s) - i k c(t-t_s)}, \quad (\text{II.2})$$

wo  $n$  ein Einheitsvektor in der Richtung von  $\mathfrak{k}$  ist und  $k$  für  $k^4$  steht. Integration über die vierte Komponente von  $k$  führt zu

$$\mathfrak{A}_l = (e/2\pi^2) \int_{-\infty}^s ds \int d^3k/k \cdot n(u n) \sin k c(t-t_s) e^{i\mathfrak{k}(r-r_s)}. \quad (\text{II.3})$$

Wir können nun mit  $r-r_s$  als Polarachse die Integration über die Winkel ausführen. Wenn die Achse als  $z$ -Richtung genommen wird, erhält man in einer Richtung  $x$  senkrecht dazu:

$$\mathfrak{A}_{lx} = (2e/\pi) \int_{-\infty}^s \frac{u_x ds}{l^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \sin k c(t-t_s) \left\{ \frac{\sin kl}{kl} - \cos kl \right\}, \quad (\text{II.4})$$

wo  $l = |l|$ ,  $l = r-r_s$ . Dieses Integral verschwindet überall im Innern des Lichtkegels,  $l < c(t-t_s)$ .

Für die  $z$ -Komponente erhält man unter Auslassung eines ähnlichen Integrals wie (II.4)

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{lz} &= (2e/\pi) \int_{-\infty}^s u_z ds/l \int_0^\infty dk \sin k c(t-t_s) \sin k l \\ &= e \int_{-\infty}^s u_z ds/l \{ \delta(l-c[t-t_s]) - \delta(l+c[t-t_s]) \} \\ &= e \int_{-\infty}^s u_z ds \Delta(x-x_s), \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

nach Formel (8) l. c. § 74. Mit Einführung eines Einheitsvektors  $e$  in Richtung  $r-r_s$  können wir in Vektorform schreiben

$$\mathfrak{A}_l = e \int_{-\infty}^s e(u e) ds \Delta(x-x_s). \quad (\text{II.6})$$

Dies Integral läßt sich ausführen und führt zu den üblichen retardierten und avancierten Potentialen, mit  $u$  ersetzt durch  $e(u e)$ . Das ist ein wohldefinierter Ausdruck solange als  $r-r_s$  endlich ist, wird aber unbestimmt, wenn man zu  $r-r_s=0$  übergeht. Alles was man tun kann, ist, über  $e$  zu mitteln. Um das Resultat kovariant zu halten, muß das vor Ausführung der  $s$ -Integration geschehen. Man erhält dann augenscheinlich

$$\mathfrak{A}_l = (e/3) \int_{-\infty}^s u ds \Delta(x-x_s) = \frac{1}{3} \mathfrak{A} \quad (\text{II.7})$$

und infolgedessen  $\mathfrak{A}_l = \frac{2}{3} \mathfrak{A}$ .

Das Bemerkenswerte daran ist u. E., daß man  $\mathfrak{A}_l$  auf ein Integral mit einer  $\Delta$ -Funktion zurückführen kann, d. h. daß die Zerlegung in Longitudinal- und Transversalteil nicht von der ganzen Bewegung abhängt. Mit Rücksicht auf unsere weiter unten vorgenommene Vertauschung von  $u$  und  $U$  muß bemerkt werden, daß der erste Teil dieser Feststellung nur zutrifft, wenn die Weltlinie auf das Innere des Lichtkegels beschränkt ist. Im entgegengesetzten Falle hat man einen Zusatzterm mit

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^s ds \{ u/l^3 - 3 l(u l)/l^5 \} \\ &= \text{grad} \int_{-\infty}^s ds (u l)/l^3 \\ &= -\text{grad} \int_{-\infty}^l (l d l)/l^3 = -\text{grad} \int_{-\infty}^l dl/l^2. \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Im Grenzfall  $l = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| = 0$  wird dies eine unendliche Konstante, die weggelassen werden muß.

### Anhang III

Wir benutzen die Bezeichnungsweise von (5.19), lassen jedoch den Index 1 von  $c_1$  fort. Die algebraische Zahl  $\cos \pi/7 = c_1 = c$  genügt neben ihrer Gleichung 7. Grades noch einer Gleichung 3. Grades:

$$c^3 = \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{2} c - \frac{1}{8}. \quad (\text{III.1})$$

Dies kann benutzt werden, um einen Zahlkörper mit rationalen Koeffizienten zur Reduktion aller Potenzen von  $c$  auf die erste und zweite aufzubauen, z. B.

$$\begin{aligned} c^4 &= \frac{1}{2} c^3 + \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{8} c \\ &= \frac{3}{4} c^2 + \frac{1}{8} c - \frac{1}{16}. \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Entsprechend hat man

$$\begin{aligned} c_2 &= 2 c^2 - 1, \\ c_3 &= 2 c^2 - c - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

usw. Auch  $s_1$  läßt sich an dieses Schema anschließen durch

$$s_1 = (4 c^2 + c - 3)/\sqrt{7}. \quad (\text{III.4})$$

Es folgt

$$s_2 = (6 c^2 - 2 c - 1)/\sqrt{7}, \quad (\text{III.5})$$

$$s_3 = (-2 c^2 + 3 c + 3/2)/\sqrt{7}$$

$$\text{und z. B. } s_1 s_2 s_3 = \sqrt{7}/8. \quad (\text{III.6})$$

## Versuch einer stark idealisierten Theorie der Hyperonen

Von G. HEBER

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut der Universität Jena

(Z. Naturforschg. 10a, 103—109 [1955]; eingegangen am 10. November 1954)

Ein skalares, reelles, relativistisches Materiefeld (Mesonen) wird skalar an ein skalares, nichtrelativistisches Materiefeld (Nukleon) gekoppelt. Bei Behandlung der quantisierten Felder mit der Tomonagaschen Methode für mittelstarke Kopplungen erhält man bekanntlich Isobaren-Zustände für 1 Nukleon. Versuchsweise werden diese angeregten Zustände des Nukleons mit den Hyperonen identifiziert. Dabei ergibt die Theorie größenordnungsmäßig das beobachtete Massenspektrum der Hyperonen, aber die Lebensdauer der angeregten Nukleonen-Zustände wird viel zu klein. Mögliche Ursachen dieser Diskrepanz werden besprochen.

Hyperonen nennt man bekanntlich diejenigen Elementarteilchen, deren Ruh-Massen zwischen der des Neutrons und der des Deuterons liegen. Zuverlässig festgestellt sind bisher<sup>1</sup> drei Typen von Hyperonen:

1. Ein neutrales Teilchen  $\Lambda^0$  der Masse  $M_{\Lambda^0} = (2182 \pm 2) m_e$  ( $m_e$  Elektronenmasse). Dieses Hyperon zerfällt mit der Halbwertszeit  $\tau \approx 3 \cdot 10^{-10}$  sec in ein Proton und ein  $\pi$ -Meson:  $\Lambda^0 \rightarrow \text{P} + \pi^-$ .
2. Ein negatives Teilchen  $\Sigma^-$  der Masse  $M_{\Sigma^-} = 2570 m_e$ , welches in das Hyperon  $\Lambda^0$  und ein  $\pi$ -Meson zerfällt:  $\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$ .
3. Ein elektrisch positiv oder negativ geladenes Hyperon, dessen Masse  $M_{\Omega} = 2940 m_e$  beträgt und das in ein Nukleon (Proton oder Neutron) und ein  $\pi$ -Meson zerfällt.

Ferner ist beobachtet worden, daß Hyperonen entstehen, wenn  $\pi$ -Mesonen geeigneter Energie auf Protonen oder auch auf Atomkerne treffen.

Diese Tatsachen legen die Vermutung nahe, daß die oben genannten Hyperonen keine wirklichen Elementarteilchen, sondern Gebilde sind, welche irgendwie aus einem Nukleon und  $\pi$ -Mesonen zusammengesetzt sind.

Theoretisch erscheint diese Vermutung durchaus nicht abwegig; denn daß die Nukleonen Quellen des  $\pi$ -Mesonfeldes sind, wird wohl allgemein akzeptiert. Das bedeutet aber, daß jedes Nukleon in seiner nächsten Umgebung ein  $\pi$ -Meson-Feld besitzt, ähnlich wie jedes elektrisch geladene Teilchen sein elektrisches Eigenfeld erzeugt. Die Existenz dieses Mesonen-Eigenfeldes bedeutet im Teilchenbild die Anwesenheit einer  $\pi$ -Mesonen-Wolke in der Umgebung des Nukleons. Diese Mesonen des Eigenfeldes kann man dem Nukleon nicht nehmen, wie man ja auch das elektrische Eigenfeld eines Teilchens nicht ändern kann. Was wir empirisch als Nukleon beobachten, ist das nackte Nukleon einschließlich seiner  $\pi$ -Mesonen-Wolke. Es ist aber

<sup>1</sup> Ich stütze mich hier auf den Vortrag von Herrn Prof. Powell anlässlich des Hamburger Physikertages 1954 mit dem Titel: „Heavy Mesons and Excited Nu-

cleons.“ S. auch: C. F. Powell, Nature, Lond. 173, 469 [1954].